ESPACES DE TRAVAIL MATHEMATIQUE CONNECTES AU LYCEE : UN PONT ENTRE LES MATHEMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES. MODELISATION DES CABLES D'UN PONT SUSPENDU PAR UNE FONCTION NUMERIQUE SPECIFIQUE.

LAGRANGE Jean-Baptiste[1] et LE FEUVRE Bernard[2]

Résumé - Cet article porte sur la modélisation dans l'enseignement des mathématiques au lycée et l'interaction avec les sciences physiques. Le cadre est celui des Espaces de Travail Mathématique Connectés. Comment organiser ces Espaces pour donner du sens aux concepts mathématiques enseignés ? Comment permettent-ils aux élèves de comprendre les liens entre ces concepts et les autres sciences ou le monde réel ? Quelles interactions avec la physique cela suppose-il ? Pour aborder ces questions, nous présentons une expérimentation impliquant un travail en Sciences Physiques, suivi d'un travail sur différents modèles selon un dispositif jigsaw (travail en puzzle) impliquant chaque élève dans un travail collaboratif de recherche et de restitution.

Mots-clefs : Modélisation, Casyopée, calculs algébriques, Espaces de Travail Mathématique, travail en groupe jigsaw

Abstract - we focused on modeling in high school mathematics education in interaction with physical sciences; our framework is that of Connected Mathematical Work Spaces. How to organize these spaces to make sense of the mathematical concepts taught? How do students understand the links between these concepts and other sciences, or the real world? What interactions with physics does this imply? To address these questions, we present an experiment involving a work in Physical Sciences, followed by a work on different models in "jigsaw" group work, making students investigate and report collaboratively.

Keywords: Modelling, Casyopée, Calculus, Mathématical Working Spaces, Jigsaw Group Work

I. LE MONDE REEL ET L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

1. La modélisation

Le groupe Casyopée[3] travaille depuis plusieurs années sur l'enseignement des fonctions dans le cadre du curriculum des programmes nationaux français. Celui-ci privilégie une approche algébrique : il est demandé aux élèves d'émettre de façon informelle des conjectures puis de les prouver à l'aide de raisonnements mathématiques classiques (Minh & Lagrange, 2016). En réaction à ce traitement étroit des fonctions, l'objectif du groupe Casyopée est de créer et d'expérimenter des situations pour le lycée où les élèves comprennent les fonctions à travers des approches convergentes d'une question. Parallèlement, le groupe développe le logiciel Casyopée associant géométrie dynamique et environnement algébrique comme outil pour contribuer à ces situations. Nous considérons ici particulièrement des situations où les questions sur lesquelles les situations sont basées relèvent du « monde réel ». L'objectif est de donner du sens aux mathématiques enseignées comme outil pour comprendre le monde. Là aussi, le curriculum est réducteur, en ce sens qu'il considère la modélisation comme une simple « traduction en langage mathématique » d'une situation du monde réel. La conséquence est que les pratiques couramment observées privilégient les manipulations de calcul algébrique au détriment de la compréhension de ces calculs en lien avec la situation étudiée.

Le cycle de modélisation de Blum et Leiss (2005) est une référence courante. Il présente l'avantage de distinguer plusieurs modèles de nature différente et de caractériser le type d'activité

---

[1] LDAR

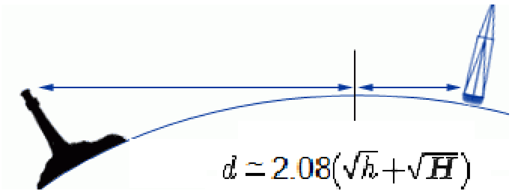
[2] IREM Rennes

[3] Le groupe Casyopée de l'IREM de Rennes est composé de R. halbert, C. Le Bihan, J. B. Lagrange, B. Le Feuvre, M.C. Manens. En 2016, il a évolué en groupe « jigsaw » de l'IREM de Rennes et a intégré de nouveaux membres.

impliqué par le passage de l'un à l'autre. Nous souhaitons cependant y apporter quelques compléments. Tout d'abord, le cycle sépare de façon tranchée les modèles « dans la réalité » et « le » modèle mathématique. Cela peut conduire à minorer le travail mathématique dans les premiers modèles, les plus proches de la situation réelle. Par exemple, dans la situation du phare (Blum, Ferri 2009) il est demandé de trouver la distance d'un navigateur à un phare, au moment où le navigateur aperçoit sa lumière juste sur l'horizon.

Le « modèle réel » proposé suppose que le navigateur est au niveau de la mer, ce qui est impossible en conditions réelles. En « science de la navigation », on utilise le résultat suivant :

d distance en Nautiques, h et H les hauteurs respectives de l'œil de l'observateur et de la lanterne du phare (en m)



Rechercher un modèle plus approprié aurait été l'occasion d'un véritable travail faisant interagir la connaissance des conditions réelles de navigation avec des mathématiques.

À côté du modèle « science de la navigation », nous pouvons distinguer un modèle géométrico-algébrique qui conduit à la formule $d = \sqrt{h^2 + 2.R.h} + \sqrt{H^2 + 2.R.H}$, h et H étant les hauteurs respectives de l'œil de l'observateur et de la lanterne du phare et R le rayon terrestre, et un modèle « analytique » qui prend en compte la « prépondérance » de R sur h et H pour valider l'approximation

$d \approx \sqrt{2R}\left(\sqrt{h} + \sqrt{H}\,\right)$ ou $d \approx \sqrt{2.R.H}\left(1 + \sqrt{\frac{h}{H}}\right)$, formule qui permet d'apprécier l'influence de la hauteur de l'œil de l'observateur.

Plutôt que de faire une séparation tranchée entre « réel » et mathématiques, nous préférons concevoir la modélisation comme mettant en jeu plusieurs modèles, chacun faisant interagir de façon différente la réalité et les mathématiques. Ceci permet aussi de voir les modèles proches de la réalité comme relevant de domaines scientifiques plus ou moins mathématisés, plutôt que du sens commun : dans l'exemple qui vient d'être donné il s'agit de la science de la navigation ; nous considérerons plus loin un exemple impliquant les sciences physiques.

Nous souhaitons enfin enrichir le cycle de modélisation pour rendre compte des multiples allers-retours entre différents modèles. Ces allers-retours sont nécessaires pour des démarches de vérification et ce sont elles aussi qui donnent du sens aux concepts en jeu dans les différents modèles par les connexions auxquelles ils conduisent.

2. Les Espaces de Travail Mathématiques connectés

Pour distinguer le travail sur différents modèles, nous mobilisons le cadre théorique des Espaces de Travail Mathématiques (Kuzniak & Richard 2013) qui permet de caractériser la façon dont les concepts prennent sens dans un contexte de travail donné. Un espace de travail est caractérisé par un plan épistémologique associant un « representamen », c'est-à-dire une représentation de l'objet sur lequel on travaille (ici un modèle), les artefacts qui permettent ce travail et un cadre théorique de référence. Ce plan épistémologique est relié à un plan cognitif par trois types de genèses : la genèse sémiotique qui donne au « representamen » son statut mathématique, la genèse instrumentale qui fait de l'artefact un instrument intériorisé et la genèse discursive qui donne son sens au cadre de référence en le mobilisant pour des preuves. Comme nous venons de le dire, la modélisation telle que nous l'entendons fait intervenir plusieurs modèles, et, pour chacun de ces modèles un espace de travail. Dans l'exemple qui précède nous considérons un espace géométrico-algébrique où le travail est surtout calculatoire et un espace « analytique » qui met en jeu l'approximation et la prépondérance.

Nous nous intéressons aux allers-retours entre ces différents modèles et donc aux liens (ou connexions) que l'élève peut faire entre les espaces de travail. Nous considérons les genèses à l'œuvre lorsque ces connexions interviennent. Notre cadre théorique est donc celui des « espaces de travail connectés » proposé par Minh & Lagrange (2016) spécifiquement pour l'enseignement des fonctions. Notre hypothèse est que ce cadre des espaces de travail connectés peut aider à concevoir et évaluer des situations d'enseignement / apprentissage basées sur la modélisation. Dans les sections suivantes, nous allons tester cette hypothèse à partir d'un exemple.

II. MODELISATION ET PONTS SUSPENDUS

Nous avons expérimenté en classe de Terminale la modélisation de ponts suspendus, visant à faire découvrir par les élèves une fonction modélisant un câble porteur à partir d'une étude des tensions menée en interdisciplinarité Math-Physiques. Dans l'esprit du cadre défini dans la section précédente, nous présentons dans cette section quatre modèles. La section suivante présentera une mise en œuvre en classe et les espaces de travail associés aux modèles.

1. Un modèle statique discret

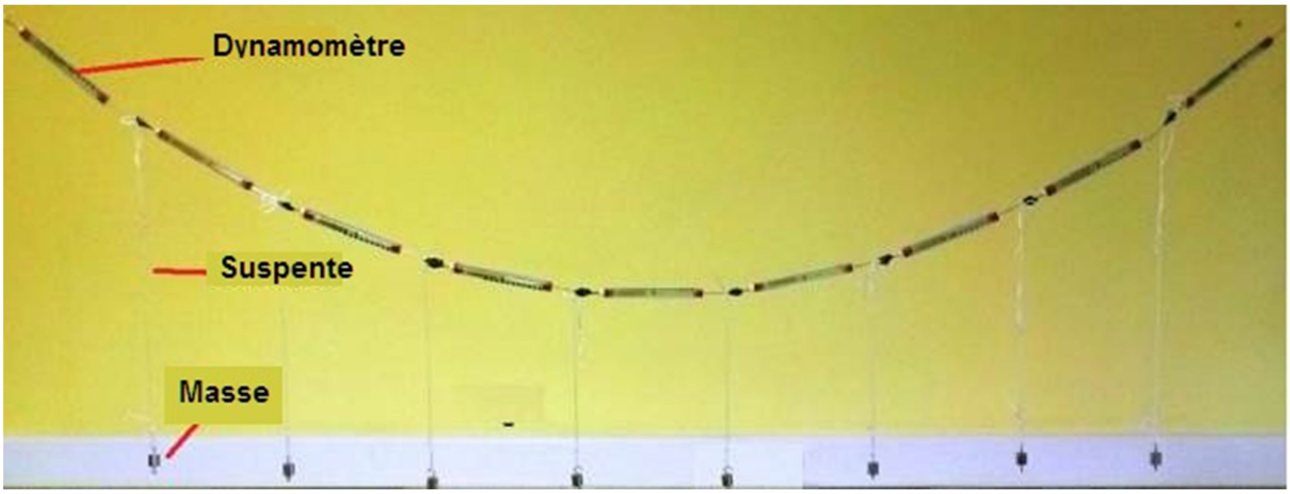


Figure 1 : Une maquette d'un câble principal

Le modèle statique discret dérive du nombre fini de suspentes : un câble principal est représenté comme un ensemble de n segments, en commençant et en terminant au niveau des points d'ancrage, et séparés par (n-1) points de suspension reliant le câble principal et les suspentes. Dans la maquette de la Figure 1, le tablier est modélisé par un ensemble de masses raccordées aux suspentes. Les dynamomètres permettent de visualiser la tension dans chaque segment. La modélisation de la tension dans l'un des câbles principaux peut être effectuée en considérant la suite des tensions $\vec{T}_i$ sur chaque segment, et pour chacune, les valeurs de la composante horizontale et de la composante verticale $(H_i ; V_i)$. La loi d'équilibre statique, appliquée à chaque point de suspension, implique que la composante horizontale est la même dans tous les segments. Cela implique aussi que la suite des valeurs de la composante verticale est en progression arithmétique.

2. Un modèle géométrique discret

Connaissant la position d'un point d'ancrage (partie supérieure d'un pilier), il est possible de calculer la suite des coordonnées des points de l'ensemble des segments modélisant le câble principal. L désigne la longueur du tablier du pont, M_0 et M_n les points d'ancrage sur les piliers ; M_1, M_2,… M_{n-1}, les points où les suspenseurs sont fixés au câble. La suite des abscisses des Mi est en progression arithmétique de raison $\frac{L}{n}$. La pente d'un segment $[M_i, M_{i+1}]$ est le rapport entre les composantes verticale et horizontale de la tension dans ce segment, d'où la formule de récurrence pour les ordonnées des M_i : $y_{i+1} = y_i + \frac{L}{n}\frac{V_i}{H}$. Avec la formule de récurrence donnée par le modèle statique pour V_i, il est possible de calculer les y_i.

3. Un modèle algorithmique discret

Un algorithme (*Figure 2*) permet de définir une fonction affine par morceaux en systématisant la construction géométrique. Les données proviennent du Pont du Golden Gate et l'origine du système de coordonnées est au milieu du pont.

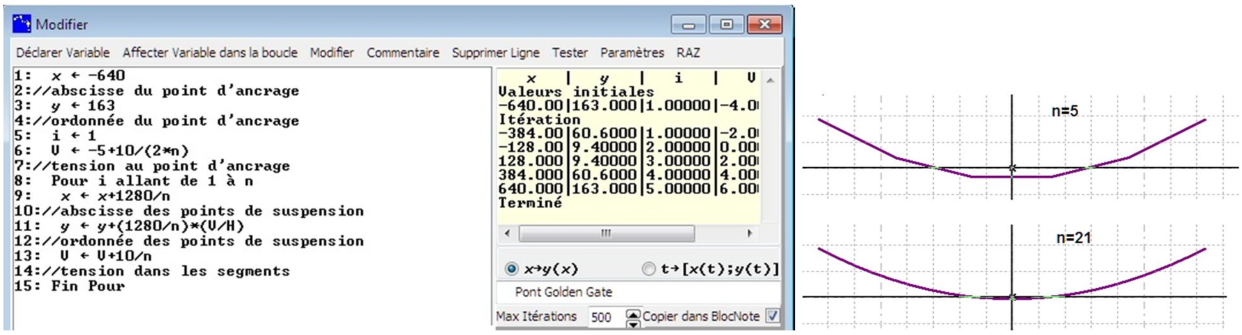


Figure 2 : L'algorithme et la visualisation

A ce stade, H est inconnu et donc paramétrique, et nous choisissons également un paramètre n pour le nombre de suspentes afin de dessiner des représentations pour plusieurs valeurs de n. En utilisant Casyopée (fonctions définies par un algorithme, Halbert et al 2017), nous obtenons des représentations pour des valeurs variées de H et n. Pour les petites valeurs de n, la représentation est un ensemble de segments. Pour des valeurs plus grandes, elle paraît une courbe. On peut ajuster H afin que le câble atteigne une hauteur donnée au-dessus du pont. Plus cette composante horizontale est grande, plus le câble s'élève au-dessus du tablier.

4. Un modèle continu

Étant donné le grand nombre de suspentes, on peut chercher une courbe, limite de l'ensemble des segments modélisant le câble lorsque ce nombre tend vers l'infini, et que donc la distance entre suspentes tend vers zéro. Avec un choix de l'origine du repère au milieu du tablier, on considère alors le câble principal comme modélisé par la courbe d'une fonction *f* définie sur [-L/2 ; L/2]. La tension en un point du câble d'abscisse x est la limite de la tension sur une suite de segments d'amplitude tendant vers zéro et encadrant x dans le modèle discret. Comme la composante horizontale de la tension dans le modèle discret est une constante que nous avons notée H, la composante horizontale de la tension dans le modèle continu est cette même constante. Par un passage à la limite depuis le modèle en statique, on obtient : $V(x) = x\frac{P}{2L}$ avec P masse du tablier du pont et L sa longueur.

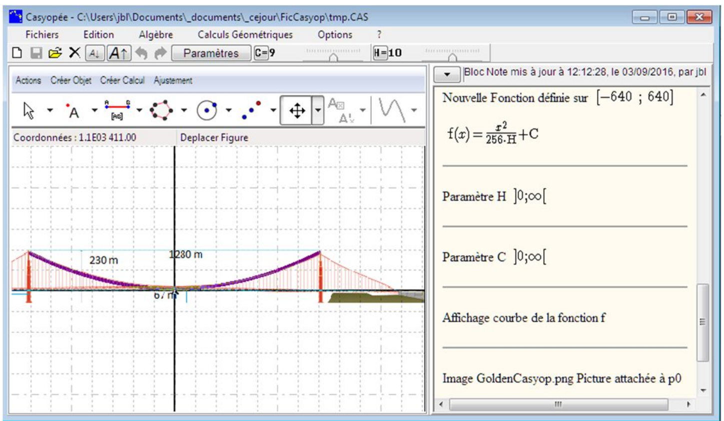


Figure 3 : un modèle continu

Avec les données du pont du Golden Gate, nous avons $f'(x) = \frac{x}{128\,H}$ puis par intégration $f(x) = \frac{x^2}{256\,H}$ + C. Avec Casyopée, on peut tracer la courbe de la fonction, insérer une image du pont dans le volet de géométrie, et piloter H et C de façon que la courbe s'adapte au câble (Figure 3).

III. MISE EN ŒUVRE EN CLASSE

La classe en puzzle ou Jigsaw Classroom

Ce dispositif a été adopté par le groupe Casyopée après une insatisfaction ressentie par rapport aux usages « traditionnels » des TICE, qu'ils soient en classe entière ou en salle informatique où finalement les élèves sont souvent très guidés dans leurs manipulations et où il y a peu d'échanges au-delà du binôme sur ordinateur. Les objectifs sont de donner plus de responsabilité à l'élève dans l'apprentissage, d'impliquer tous les élèves et de favoriser la collaboration entre eux. Les modalités de travail sont en quatre phases. Un temps de problématisation peut être individuel ou en groupe ou à la maison. Les élèves sont ensuite répartis en groupes d'experts qui travaillent sur différentes approches du problème à partir d'un document et d'autres supports. Ensuite les groupes sont mixés et dans les nouveaux groupes, chaque expert développe son approche du problème pour les autres et le groupe élabore un compte rendu. Finalement, il y a une synthèse en classe entière.

1. Potentialités, contraintes ; espaces de travail

La présentation des modèles ci-dessus montre que l'étude d'un pont suspendu implique de considérer les données dans le monde réel, ainsi qu'un certain nombre de concepts liés à la physique et à l'analyse : la tension, l'équilibre statique des forces, la projection de vecteurs, la pente de segments et le gradient des courbes, une progression arithmétique et une fonction linéaire, les modèles discrets et continus, les limites et l'intégration ... Tous ces contenus sont enseignés dans les programmes du secondaire, ainsi l'objectif pour les élèves n'est pas de « réinventer » chacun d'eux isolément, mais plutôt de reconnaître comment une question dans une situation du monde réel implique la compréhension de ces concepts de façon opératoire et en interaction. Dans le programme français, l'étude d'un pont suspendu peut être réalisée dans la dernière année du cycle scientifique secondaire (12ème année, Terminale). L'année précédente, les élèves ont étudié les progressions arithmétiques et la dérivation des fonctions (en relation avec la pente des tangentes), et, ont appris à programmer les valeurs de suites, ainsi que des approximations de courbes de fonctions dont la dérivée est connue (méthode d'Euler). Dans cette dernière année, les élèves ont travaillé sur les tensions en physique et sur l'intégration en mathématiques. Il existe une contrainte dans ces classes : les élèves passent le baccalauréat à la fin de l'année, un examen pour lequel les compétences standards comptent plus que la compréhension en profondeur. Ainsi, il y a peu de temps pour des situations qui vont au-delà de compétences isolées dans des tâches standards, et un enseignant doit insister sur la contribution de tâches moins standards comme dans la situation proposée ici. A partir des quatre modèles présentés ci-dessus, nous considérons quatre espaces de travail.

- Dans le premier, l'objet en jeu est la suite des tensions au niveau des points de connexion des suspentes, et les règles sont la loi d'équilibre statique et les propriétés des progressions arithmétiques. Les artefacts sont des dispositifs concrets de mesure utilisés en physique et en mathématiques, dynamomètres, rapporteurs, ainsi que d'autres outils « abstraits » comme la décomposition des tensions dans les composants verticaux et horizontaux. Nous appelons cet espace de travail, l'espace des systèmes statiques, ou en raccourci, l'espace de la statique.
- Le deuxième espace de travail porte sur un modèle discret d'un câble principal, et donc sur des objets géométriques. La règle principale est la définition analytique d'un segment : les élèves doivent calculer les coordonnées du point, connaissant les coordonnées de l'autre point, la pente et la différence entre les abscisses. Nous appelons cet espace de travail, l'espace géométrique.
- Dans le troisième espace de travail, un artefact important est l'environnement de programmation de Casyopée, qui permet de calculer une série de points au moyen d'un traitement itératif simple ;

ces points permettent de définir une fonction par morceaux continue, dont le graphique, dans le cas du pont, représente le modèle discret du câble principal. Nous appelons cet espace de travail, l'espace algorithmique.

- Enfin, les objets dans le quatrième espace sont des fonctions régies par les règles classiques de l'analyse. C'est l'espace de travail des fonctions mathématiques. Trouver une primitive d'une fonction linéaire ne devrait pas être difficile pour les élèves. Toutefois, la formule de la fonction linéaire implique un paramètre (la composante horizontale H de la tension). Ils peuvent utiliser un logiciel comme Casyopée pour obtenir une courbe de ce modèle continu, comparer à une image du pont et au modèle discret, et ajuster la composante horizontale H afin que les trois représentations coïncident.

2. *Les quatre phases*

- La première phase dure une heure et a été préparée avec le professeur de physique. Elle vise d'abord à initier les élèves aux questions liées aux ponts, en particulier les ponts suspendus. Ils sont invités à consulter un site web dédié, pour sélectionner et esquisser quatre ponts de différents types, à regarder une vidéo illustrant l'idée de tension le long d'une corde horizontale et le fait que, quelle que soit la tension, la corde n'est plus rectiligne dès qu'une force est appliquée verticalement sur un point.

Figure 4 : les montages de la 1ère phase

Ils doivent répondre à trois questions : (1) pourquoi dans un pont suspendu les câbles principaux ne sont-ils pas rectilignes ? (2) quel type de fonction proposez-vous pour modéliser le câble principal ? (3) la forme d'un câble principal est-il déterminé par la longueur des suspentes ? Toujours dans cette première phase, les élèves doivent réaliser deux montages comme dans la Figure 4, lire les tensions dans les dynamomètres et mesurer les angles, calculer les composantes horizontale et verticale des tensions et vérifier l'équilibre statique des forces.

- La deuxième phase dure 50 min. Au début, les données relatives au pont du Golden Gate sont présentées à toute la classe. Les élèves regardent aussi une maquette (Figure 1), et un élève lit les tensions dans les dynamomètres à toute la classe. Ensuite, les élèves sont divisés en groupes de quatre. Chaque groupe a une tâche, A, B, C ou D. C'est le dispositif « classe en puzzle » que nous avons présenté ci-dessus.

La tâche A est liée à l'espace de travail statique : inspirés par le travail dans la première phase, les élèves doivent prendre en compte la suite des composantes verticale et horizontale des tensions au niveau des points de connexion, reconnaître que la composante horizontale est constante et calculer une formule pour la suite des composantes verticales.

La tâche B est liée à l'espace de travail géométrique. Une formule pour la valeur de la pente de chaque segment d'un modèle discret du câble principal est donnée aux élèves, en fonction d'un paramètre H et du nombre n de segments. Les élèves doivent calculer des formules pour générer la suite des coordonnées des points de suspension.

La tâche C est liée à l'espace de travail algorithmique. Un algorithme comme dans la figure 3 est donné aux élèves ; ils doivent entrer et exécuter l'algorithme dans Casyopée, interpréter le paramètre n, et régler le paramètre H dans le but que le modèle donné par l'algorithme soit conforme à la forme du câble.

La tâche D est liée à l'espace de travail des fonctions mathématiques. Les élèves doivent rechercher une fonction *f* dont la courbe soit un modèle d'un câble principal (modèle continu). Ils sont informés du fait que la composante horizontale de la tension dans le câble est une constante H et une formule leur est donnée exprimant la composante horizontale de la tension en fonction de l'abscisse dans un repère donné. Ils doivent trouver une formule pour la dérivée de *f*, en tenant compte du fait que la tension est dans la direction de la tangente à la courbe. Puis, en utilisant Casyopée, ils doivent trouver une formule pour *f* et régler le paramètre H afin que la courbe de la fonction *f* soit conforme à la forme du câble (Figure 3).

- La troisième phase dure aussi 50 min. Les élèves forment de nouveaux groupes.

Chacun de ces nouveaux groupes est construit de façon à rassembler un ou deux élèves de chacun des groupes de la seconde phase, ayant fait respectivement les tâches A, B, C ou D. Il est demandé, à l'intérieur de ces nouveaux groupes, de partager les résultats obtenus à la seconde phase, et de rédiger un rapport mettant en évidence les points importants. Dans ce travail, un élève venant par exemple d'un groupe ayant fait la tâche A, est un expert de l'espace de travail « statique » et informe les élèves venant d'autres groupes des méthodes travaillées dans cet espace de travail A.

Comme nous l'avons montré plus haut, l'idée de plusieurs espaces de travail pour l'étude d'un problème est un guide pour l'organisation des tâches.

- La quatrième phase (30 min) est une synthèse collective dirigée par le professeur.

Observation

Cette mise en œuvre a été observée dans une classe de Terminale de 35 élèves à la fin du mois de mars. Cette classe était familière avec l'organisation « Jigsaw Classroom » qui avait déjà été mise en œuvre pour un travail collaboratif sur un chapitre de cours. Les élèves étaient pour la plupart des élèves qui réussissent correctement, sans plus. Les contenus en jeu en physique et en mathématiques avaient été enseignés aux élèves dans les cours précédents. Les phases ont été enregistrées et des entretiens ont été menés avec 3 élèves après la phase 3.

Phase 1 : problématisation

Dans la première phase, la plupart des élèves ont esquissé un pont suspendu sans les suspentes. Ils ont généralement expliqué la non-horizontalité du câble principal par le poids du tablier du pont, mais ont adhéré à la fausse explication de la forme par la longueur des suspentes. Ils ont compris à partir de la vidéo que le poids du tablier « plie » le câble, mais ils n'ont pas lié la forme du câble avec la répartition uniforme du poids, grâce aux suspentes. Certains élèves ont montré une meilleure compréhension, en écrivant que la forme est la conséquence des forces (ou des tensions) sur le câble. Dans le reste de la première phase, après avoir surmonté les difficultés instrumentales avec les montages, les élèves ont correctement enregistré les angles et l'intensité des forces. Ils ont reconnu la loi d'équilibre statique, mais ils n'ont généralement pas calculé les composantes. En particulier le fait que la composante horizontale est la même sur tous les trois dynamomètres dans l'appareil à deux poids n'ait pas apparu. Dans la discussion en classe, avant de diviser la classe en groupes pour la phase 2, l'enseignant a insisté sur la décomposition d'un vecteur en composantes et sur les variations des composantes de la tension dans le câble en jeu dans les phases suivantes. Il a également répété que le but est d'étudier mathématiquement la forme du câble.

Phase 2 : groupes d'experts

Une série de quatre groupes ont été observés faisant chaque tâche en phase 2. Les élèves observant la tâche A (statique) ont assez bien réussi, alors que des difficultés ont été observées pour les élèves effectuant d'autres tâches. Les élèves de la tâche B (géométrie) ont commencé par esquisser un pont avec beaucoup de suspentes, ce qui ne leur a pas permis pas de considérer des segments modélisant le câble principal. Ils ont été invités par l'observateur à limiter à 4 suspentes. Il leur a fallu du temps pour trouver les coordonnées du point d'ancrage et ils ont eu des difficultés à utiliser la formule donnée pour la pente des segments et la distance entre les suspentes afin de calculer les coordonnées du point suivant. En fait, ce calcul implique plusieurs paramètres liés aux données du pont, situation courante en sciences physiques mais non en mathématiques. Les élèves de la tâche C (algorithmique) ont été très lents à entrer l'algorithme dans Casyopée. L'affichage de la courbe sur l'écran a été erroné à cause de petites erreurs dans l'algorithme. Ils n'ont pu corriger que lorsque l'observateur les a aidés à analyser l'algorithme. Ils ont identifié le paramètre n comme étant lié au nombre de suspentes et ont proposé la valeur 83 (le nombre de suspentes dans le Golden Gate Bridge). Ils ont estimé que cette valeur est « proche de l'infini » et c'est pourquoi la courbe n'est pas apparue comme une ligne brisée, contrairement à ce qui a été observé pour de petites valeurs de n. Lorsque l'observateur a expliqué que H est une tension, ils ont pris conscience de ce que l'augmentation de la valeur de ce paramètre « redresse » le câble, et ont trouvé une valeur appropriée. Les élèves de la tâche D (fonctions mathématiques) ont trouvé une formule pour la tension verticale, mais ont eu de la difficulté à interpréter le fait que la tension est dans la direction de la tangente à la courbe.

Phase 3 : groupes d'apprentissage

Un groupe a été observé en phase 3 réunissant des élèves observés en phase 2. Dans ce groupe, chaque élève a expliqué sa tâche et son travail dans la phase précédente. L'enregistrement vidéo montre que les autres élèves ont écouté attentivement et demandé des explications supplémentaires. Le paramètre H a été identifié par les élèves comme jouant un rôle dans chaque tâche ; par exemple quand un élève qui avait fait la tâche C ne s'est plus souvenu de l'effet de l'augmentation de H, confondant avec la « hauteur du câble », l'élève qui avait fait la tâche A l'a corrigé, en disant que c'est une tension et que l'augmenter devait « redresser » le câble plutôt que de le « relâcher ». Le même élève a aidé à surmonter la difficulté rencontrée par l'élève qui avait fait la tâche D pour trouver la direction de la tangente à la courbe et ensuite la dérivée de la fonction, en disant « il suffit d'intégrer le quotient de V et H ». En allant plus loin dans la tâche D, les élèves ont été troublés par le paramètre H dans le dénominateur, certains proposant une Ln (H) dans la primitive. Ils ont pu réaliser la tâche D en utilisant Casyopée. En revanche, la tâche non terminée B et le lien avec l'algorithme dans la tâche C n'ont pas été abordés.

Entretiens d'évaluation

Trois élèves ont été interviewés après la phase 3, afin de mieux évaluer les liens entre les modélisations dans les trois domaines opérés au cours du travail de groupe. Ils ont souligné que la situation était plus complexe que d'habitude (« nous avons dû relier beaucoup de choses différentes ») et qu'ils n'étaient pas « habitués à mélanger la physique et les mathématiques ». En commentant la première phase, ils ont montré comment leur compréhension de la structure d'un pont a progressé : ils ont mentionné le rôle des suspentes et ont fait le lien entre un pont suspendu et un pont en arc relativement à la façon dont le pont est soutenu. Ils ont également fait le lien entre le montage avec deux poids dans la première phase, et un pont suspendu « avec deux suspentes ». Ils ont encore eu des difficultés à considérer les pentes des segments dans la tâche B pour trouver les coordonnées des points de suspension. Cependant, ils ont correctement interprété l'algorithme de la tâche C et ont été capables de relier l'évolution de H et de x et y respectivement dans les tâches A et B. Ils n'ont pas montré clairement que la fonction de la tâche D était la limite de la fonction définie par un algorithme dans la tâche C. À partir de la visualisation graphique, ils ont pensé que c'était plus ou moins la même fonction pour de grandes valeurs de n. La visualisation est alors la façon dont les élèves relient l'algorithme et la fonction mathématique. L'observateur a demandé d'expliquer pourquoi le gradient en un point de la courbe est le quotient de V et H. La réponse attendue était que la tension a la direction de la tangente, mais les élèves ont simplement écrit $f'(x) = \Delta y/\Delta x = V(x)/H$ sans plus d'explication. Il semble que la première égalité soit commune dans le cours de physique et que la seconde dérive de la définition des composantes dans la tâche A. Ainsi, les élèves ont établi un lien entre l'étude statique et la fonction mathématique sans considérer explicitement un passage à la limite d'un modèle discret à un modèle continu.

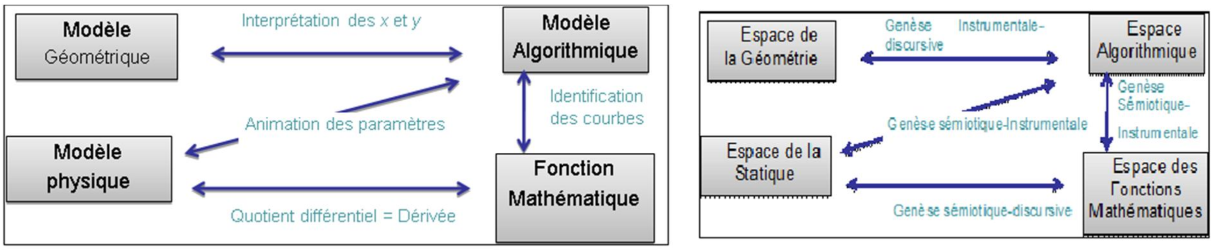


Figure 5: Les liens opérés par les élèves

IV. CONCLUSION

Nous reprenons les questions de l'appel à contributions à partir de notre expérience. Les réponses que nous apportons nous semblent valider l'hypothèse émise au début de cet article.

● *Du point de vue épistémologique, quel est le rôle des mathématiques par rapport aux autres disciplines dans la modélisation de situations réelles et complexes ?*

Le cadre des espaces de travail connectés permet de considérer les autres disciplines (les sciences physiques dans l'exemple) non comme des « pré-mathématiques », mais comme des espaces de travail à part entière avec leur propre mathématisation, et de développer des liens avec les espaces de travail mathématiques.

● *Quels sont les apports pour les apprentissages des élèves et quelles en sont les difficultés ?*

Les difficultés sont dans la complexité de la situation soulignée par les élèves. Ceux-ci comprennent certains aspects des modèles et des liens entre modèles, mais ne maîtrisent pas l'ensemble. Néanmoins, les liens qu'ils font entre les espaces de travail leur permettent, selon nous, de mieux maîtriser les concepts d'analyse du lycée.

● *Comment les pratiques enseignantes prennent-elles en compte les injonctions institutionnelles au regard de la modélisation et de l'interdisciplinarité?*

Il n'est pas facile au lycée et plus particulièrement en Terminale de se conformer à ces injonctions. Dans l'exemple du pont, la collaboration avec le laboratoire de Physique et l'organisation en classe « jigsaw » a permis de faire vivre la situation.

● *À quels problèmes sociétaux, de recherche et d'enseignement, la question de l'interdisciplinarité sous l'angle de la modélisation répond-elle ?*

Un professeur de Sciences Physiques nous a déclaré que la situation du pont serait pour lui un support pour répondre à une question souvent posée par les élèves : qu'est-ce que le métier d'ingénieur et à quoi servent les maths et la physique du lycée pour cela ?

● *Quels défis et opportunités pose l'articulation des concepts issus de différentes disciplines pour l'enseignement ?*

Dans l'exemple du pont, l'articulation des concepts sous-tendue par les liens entre espaces de travail est une opportunité pour sortir d'un enseignement de l'analyse réduit à la visualisation et au calcul algébrique, et pour donner sens aux concepts de ce domaine.

REFERENCES

Blum W., & Leiss D. (2005). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? Dans C. Haines, P. Galbraith, W. Blum et S. Khan (dir.), Mathematical Modeling (ICTMA-12). Education, Engineering and Economics (p. 222-231). Chichester: Horwood.

Blum W., Galbraith P. L., & Niss M (2007). Introduction. In W. Blum P. L. Galbraith, H Heml, &M Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 32). New York, NY: Springer.

Blum W., & Ferri R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.

Halbert R.,Lagrange, J. B., Le Bihan C., Le Feuvre, B., Manens, M. C. (2017) définir des fonctions par un algorithme ; motivation, réalisation dans Casyopée et exemples. *Mathematice*,53. http://revue.sesamath.net/spip.php?article914.

Kuzniak A. & Richard P.R. (2013). Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* 17, Numero Extra. 1.

Lagrange J.-B. (2016) Connected working spaces for secondary students' understanding of calculus: modelling a suspension bridge through "jigsaw" group work. *Colloque Espaces de Travail Mathématique* July 18-22 2016 University of Western Macedonia. http://etm5.web.uowm.gr/wp-content/uploads/2017/10/ETM5-FIN.pdf

Minh T. K., Lagrange J.B. (2016) Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM Mathematics Education*. 48: 793. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0774-z

ANNEXE : remarques sur la présentation

Les quelques questions ont porté sur l’organisation des séances où les élèves ont travaillé en puzzle (jigsaw teaching). Notamment il a été précisé que ce sont les mêmes élèves qui ont participé aux différentes étapes du travail en puzzle.